

Calculs proportionnels

Deux grandeurs sont proportionnelles si la seconde s'obtient en multipliant la première par un nombre, autre que 0, appelé **coefficient de proportionnalité**.

Calcul de la quatrième proportionnelle

À partir de trois valeurs connues, on détermine la quatrième valeur ou quatrième proportionnelle.

À savoir

On utilise la recherche de la quatrième proportionnelle au quotidien ! Dans les calculs de pourcentages (augmentation, diminution), de vitesses moyennes, de prix à payer en fonction du poids, de calculs de dose, de recettes, dans les problèmes de conversion d'unités...

Règle de trois ou produit en croix ?

Les deux mon capitaine ! Ces deux techniques de résolution coexistent, bien que le produit en croix soit préféré pour les calculs de doses en IFSI. Eh oui ! Mais rien n'empêche d'utiliser la première pour le jour J si elle vous convient mieux.
EXEMPLE : 2 mètres de tissu = 10 €, 3 mètres = ?

Il existe deux techniques pour résoudre ce problème : la règle de trois et le produit en croix

Règle de trois

Cette méthode de calcul permet de déterminer à partir de **TROIS valeurs indiquées dans l'énoncé** une quatrième valeur en utilisant le principe de proportionnalité.

$$\frac{\text{valeur donnée}}{\text{quantité donnée}} \times \text{quantité demandée} = \text{valeur demandée}$$

Dans l'exemple, les trois valeurs données sont 2 mètres, 10 € et 3 mètres. Il est demandé de rechercher la quatrième valeur, soit le prix pour 3 mètres. Cela consiste à calculer la valeur d'une unité puis à multiplier celle-ci par le nombre d'unités demandées. Ici, on ramène le prix du tissu à son unité (1 mètre) en divisant le prix total (10) par la quantité (2), et on le multiplie par la quantité demandée (3 mètres) :

$$\frac{10}{2} \times 3 = 5 \times 3 = 15 (\text{€})$$

Produit en croix

Cette méthode revient à utiliser la règle de trois dans un petit tableau de proportionnalité de quatre cases avec les trois valeurs connues a , b et c et la valeur à rechercher X ou quatrième proportionnelle. Dans le tableau ci-dessous, le produit de a par X est égal au produit de b par c . En multipliant les valeurs en diagonale (ou **en croix**), on obtient une égalité.

Grandeurs	Valeurs	
1 ^{re} grandeur	a	c
2 ^e grandeur	b	X

Puis effectuer le
produit en croix pour
trouver la valeur de X

a	c
b	x

$$a \times X = b \times c$$

donc

$$X = (b \times c) / a$$

Reprenons l'exemple :

Grandeurs	Valeurs		
Nombre de mètres de tissu	2	=	10
Prix	3	=	X

qui se simplifie en :

2	10
3	X

Notre conseil

Attention à bien poser les trois valeurs connues et celle à rechercher dans les bonnes catégories d'informations ou grandeurs sinon le calcul et le résultat seront faux !

2	10
3	X

$$= 3 \times 10 = 2 \times X. \text{ Donc } X = \frac{3 \times 10}{2} = 30 / 2 = 15. \text{ Soit } 15 \text{ €}$$

Tableau de proportionnalité

Les consignes du problème peuvent demander le prix pour 4 m, 7 m, 11 m...

Ces demandes figurent dans un tableau dit de proportionnalité, ou bien c'est au candidat de l'élaborer. C'est un tableau où les valeurs de l'une des lignes sont proportionnelles aux valeurs de l'autre :

1 ^{re} grandeur	Nombre de mètres	2	3	4	7	11
2 ^e grandeur	Prix	10	?	?	?	?

Si $2 \text{ m} = 10 \text{ €}$, $1 \text{ m} = 5 \text{ €}$, $4 \text{ m} = 4 \times 5 = 20 \text{ €}$, $7 \text{ m} = 7 \times 5 = 35 \text{ €}$...

Calculer le coefficient de proportionnalité

Le nombre qui permet de passer d'une suite de nombres à une autre s'appelle le coefficient de proportionnalité. Pour trouver ce coefficient, on prend la valeur de la 1^{re} grandeur et celle de la 2^e qui lui correspond. Puis on divise la 2^e par la 1^{re}.

Dans l'exemple ci-dessous, la seule correspondance donnée entre les deux grandeurs est $10/2$.

Grandeurs			Valeur		Coefficient de proportionnalité
2 ^e grandeur	Prix	=	$\frac{10}{2}$	=	5
1 ^{re} grandeur	Nombre de mètres				

Ce nombre constant obtenu (5), appelé **coefficient de proportionnalité**, sert à calculer :

- la valeur manquante du bas en la multipliant par la valeur du haut ;
 - la valeur manquante du haut en divisant la valeur du bas par ce coefficient.
- Les consignes du problème peuvent combiner la recherche de valeurs sur les deux lignes. Le tableau peut être représenté comme cela :

Grandeurs		Coefficient de proportionnalité					
1 ^{re} grandeur	Nombre de mètres	2	3	4	?	11	?
2 ^e grandeur	Prix	10	?	?	35	?	85

	Nombre de mètres	2	3	4	7	11	17	
	Prix	10	15	20	35	55	85	

Tous les rapports sont égaux, que l'on multiplie la ligne du haut par 5 ou que l'on divise la ligne du bas par 5. **Dans le cas contraire, il n'y aurait pas proportionnalité.**

Astuce pour vérifier les résultats

Deux à deux, les colonnes obéissent à la règle des diagonales du produit en croix : $2 \times 15 = 3 \times 10 = 30$, $3 \times 20 = 4 \times 15 = 60$, $11 \times 85 = 17 \times 55 = 935$, et ce quelle que soit la colonne, par exemple, $2 \times 35 = 7 \times 10 = 70$.

► Entraînements

À vous de résoudre ces problèmes en vous aidant des exemples et des techniques détaillés ci-dessus.

Exercice 1

Voici les ingrédients nécessaires pour réaliser une recette de crêpes pour 6 personnes : 600 g de farine, 1,2 L de lait, 6 œufs et 3 g de sel.

Calculez la quantité nécessaire de chaque ingrédient pour la préparation des crêpes pour 8 personnes.

Exercice 2

Pour aller à Nice une ambulance consomme 88,20 L d'essence. Sachant que la distance Paris-Nice est de 980 km :

- Combien d'essence cette ambulance consomme-t-elle pour faire 100 km ?
- Si cette ambulance avait consommé 177 L d'essence, combien de kilomètres aurait-elle parcourus ?

Exercice 3

Sachant que les pertes liquidiennes physiologiques chez un adulte en bonne santé sont de 3 L par 24 heures et que la quantité d'urine représente 60 % des pertes, calculez le volume urinaire des 24 heures, puis donnez le résultat en dm^3 .

Exercice 4

Sachant que le sang est filtré par les reins à raison de 120 mL par minute :

- calculez en millilitres par 24 heures le volume épuré par les reins ;
- convertissez le résultat en litres par 24 heures.

Exercice 5

Voici le volume de liquide glucosé libéré par un perfuseur pendant un temps donné :

- déterminez le coefficient de proportionnalité ;
- à $t = 30$ min, quel sera le volume de liquide glucosé libéré ?

Temps (en min)	1	3	10	20	30
Volume de liquide perfusé (en gouttes)	27	81	270	540	---

Exercice 6

Une aide à domicile achète, pour une personne âgée, 4 steaks hachés à 1,35 € pièce et 1 rôti vendu à raison de 20,48 € le kg. Elle paie au total 28 €.

- Quel est le prix des steaks ?
- Quel est le prix du rôti ?
- Quel est le poids du rôti en kg ? Vous exprimerez le résultat avec 2 chiffres après la virgule.

CORRIGÉS

■ EXERCICE 1

Règle de trois : diviser par 6 pour obtenir la quantité pour 1 personne puis multiplier par 8 pour obtenir la quantité nécessaire pour 8 personnes.

Farine : $600/6 \times 8 = 800$ g

Lait : $1,2/6 \times 8 = 1,6$ L

Œufs : $6/6 \times 8 = 8$ œufs

Sel : $3/6 \times 8 = 4$ g de sel

■ EXERCICE 2

a. $88,20/980 \times 100 = 9$. Cette ambulance consomme 9 L pour faire 100 km.

b. $177/9 \times 100 = 1966$. Elle aurait parcouru 1 966 km.

■ EXERCICE 3

$3 \times 60/100 = 1,8$ L, soit $1,8 \text{ dm}^3$.

■ EXERCICE 4

a. $120 \times 60 \times 24 = 172\,800$ mL.

b. 172,80 L.

■ EXERCICE 5

a. Le coefficient de proportionnalité est 27 (27/1). C'est le volume de liquide perfusé en gouttes en fonction du temps (en min), soit 27 gouttes/min.

b. Calcul du volume libéré en 30 min : $30 \times 27 = 810$ gouttes.

Le volume de liquide glucosé libéré est de 810 gouttes en 30 min.

■ EXERCICE 6

a. Calcul du prix des steaks : $1,35 \text{ €} \times 4 = 5,40 \text{ €}$.

b. Calcul du prix du rôti : $28 \text{ €} - 5,40 \text{ €} = 22,60 \text{ €}$.

c. Calcul du poids du rôti en kg :

$$\frac{20,48}{1} = \frac{22,60}{x}$$

$$x = \frac{22,60}{20,48}$$

$x = 1,103$. Le poids du rôti est de 1,10 kg.